ディジタル論理　Nr. 13

小堀　聡

4.5 ファジィ命題

ファジィ命題：ファジィ集合を用いて表される命題
ファジィ命題「x is A」の真理値は，ファジィ集合Aのメンバーシップ関数$\mu_A(x)$で表されると考える．つまり，真理値として［0，1］内の数値をとる．
$\mu_A(x)$は「xがAである可能性」を表しているとも考えられる．つまり，可能性分布をΠ_xとすれば，

「x is A」　→　$\Pi_x = A$

となる．

複合命題

主語が同じ場合：

(x is A) and (x is B)

の真理値はファジィ集合$A \cap B$のメンバーシップ関数

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

によって与えられる．すなわち，

((x is A) and (x is B)) = (x is $A \cap B$)

であり，

(x is A) and (x is B)　→　$\Pi_x = A \cap B$

となる．
同様に

(x is A) or (x is B)　→　$\Pi_x = A \cup B$

not (x is A)　→　$\Pi_x = \overline{A}$

となる．

主語が異なる場合：
「x is A」と「y is B」とすれば，複合命題はファジィ関係Rを使って一般に「(x, y) is R」と表される．
まず，次の命題を考える．

(x is A) and (y is B)

AをXにおけるファジィ集合，BをYにおけるファジィ集合とする．直積$A \times Y$を考えると，そのメンバーシップ関数は，

$$\mu_{A \times Y}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_Y(y) = \mu_A(x)$$

であるから，

(x is A) = ((x, y) is $A \times Y$)

である．
同様に

(y is B) = ((x, y) is $X \times B$)

である．
したがって，

((x is A) and (y is B))
　= (((x, y) is $A \times Y$) and ((x, y) is $X \times B$))
　= ((x, y) is ($A \times Y$) ∩ ($X \times B$))

となる．

ところで，

$$\mu_{(A\times Y)\cap(X\times B)}(x,\ y)=\mu_{A\times Y}(x)\wedge\mu_{X\times B}(y)$$
$$=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)=\mu_{A\times B}(x,\ y)$$

であるから，

((x is A) and (y is B)) = ((x, y) is $A\times B$)

となり，$R=A\times B$ とすればよいことが分かる．

すなわち，

(x is A) and (y is B) → $\Pi_{(x,\ y)}=A\times B$ ⇔ $\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$

同様にして

(x is A) or (y is B) → $\Pi_{(x,\ y)}=(A\times Y)\cup(X\times B)$ ⇔ $\mu_A(x)\vee\mu_B(y)$

次に，含意形式の命題を考える．

if (x is A) then (y is B)

という条件命題は，$A\Rightarrow B=\neg A\vee B$から

(not (x is A)) or (y is B)

と考えることにすれば，その真理値は

「(x, y) is $(\overline{A\times Y})\cup(X\times B)$」

の真理値に等しい．すなわち

if (x is A) then (y is B) → $\Pi_{(x,\ y)}=(\overline{A\times Y})\cup(X\times B)$

となる．

ところが，

if (x is A) then (x is A)

という命題は恒真（トートロジー）であるが，

「x is $\overline{A}\cup A$」

の真理値は，ファジィ集合の演算では補元律が一般に成り立たないことから，常に１とはならない．

そこで，実用化されたファジィ推論では，含意形式の命題は連言と同じ定義を用いる．

(x is A) and (y is B)

すなわち，

if (x is A) then (y is B) → $\Pi_{(x,\ y)}=A\times B$ ⇔ $\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$

述語修飾

		age(John) is not YOUNG
age(John) is YOUNG	→	age(John) is very YOUNG
		age(John) is more or less YOUNG

修飾語mによって述語Aが修飾されたファジィ命題「x is mA」の真理値は，

$1-\mu_A(x)$	:	m=not の場合
$\mu_A(x)^2$	:	m=very の場合
$\mu_A(x)^{0.5}$	:	m=more or less の場合

となる．

ファジィ推論

RをXからYへのファジィ関係，AをXにおけるファジィ集合としたとき，

$$B = A \circ R$$

によってYにおけるファジィ集合Bが導かれるとする．

例：

X＝Y＝｛１，２，３｝とし

A＝LARGE＝0.1/1＋0.4/2＋1/3

R＝APPROXIMATELY-EQUAL＝1/(1,1)＋1/(2,2)＋1/(3,3)
＋0.5/(1,2)＋0.5/(2,1)＋0.5/(2,3)＋0.5/(3,2)

とすれば

$$B = A \circ R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

が得られる．

more or less LARGE＝$0.1^{0.5}$/1＋$0.4^{0.5}$/2＋$1^{0.5}$/3＝0.32/1＋0.63/2＋1/3

であるから，Ｂは近似的に more or less LARGE であると考えられる．

したがって，次のような推論が得られる．

x is large

x and y is approximately equal

---

y is more or less large