ディジタル論理　Nr. 12

小堀　聡

４．ファジィ論理

4.1 「あいまいさ」について

多義性

自然言語理解：単語の意味の多義性
画像理解：画像要素の解釈の多義性
→文脈情報や制約条件の利用

不確実性

確率的
主観的
→ファジィ論理

不完全性

例外のある不完全な知識
→非単調論理

4.2 通常の集合（クリスプ集合）

全体集合をX，その部分集合をAとしたとき，

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1: x\in A\\ 0: x\notin A\end{cases}$$

と定義されるX上の関数

$\chi_A : X \to \{1, 0\}$

をAの特性関数という．この特性関数を用いれば部分集合Aは

$A=\{x \mid \chi_A(x)=1\}$

と表される．

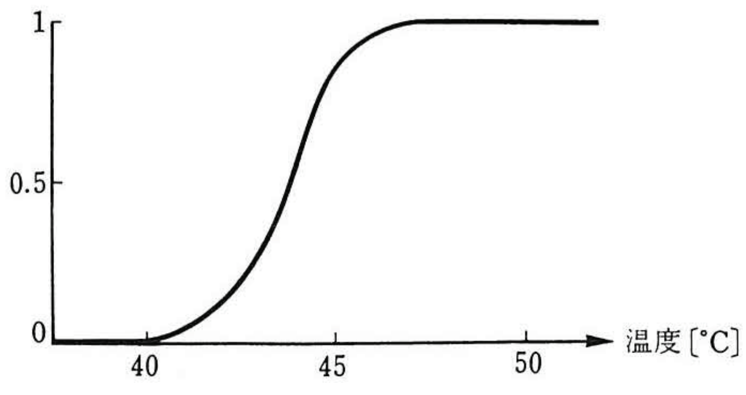
4.3 ファジィ集合

ファジィ集合は，クリスプ集合の特性関数の値域を［０，１］へと拡張した関数によって定義される．この関数をメンバーシップ関数という．

全体集合をXとしたとき，Xにおけるファジィ部分集合Aとは，
メンバーシップ関数

$\mu_A : X \to [0, 1]$

によって定義される集合である．
ここで，$x\in A$に対する値$\mu_A(x)\in[0, 1]$は要素xがファジィ集合Aに属する程度または
グレードを表している．



「熱い」という言葉の意味を表すファジィ集合

表記法

Xが有限集合の場合，すなわち$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$のとき

$$A=\mu_A(x_1)/x_1+\mu_A(x_2)/x_2+\cdots+\mu_A(x_n)/x_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i$$

ここで，／は割り算ではなく，x_iのグレードが$\mu_A(x_i)$であることを示している．
また，演算記号＋は足し算ではなく「または」を表す．

ファジィ集合の演算

クリスプ集合の演算の自然な拡張

全体集合　$X \Leftrightarrow \mu_X(x)=1, \forall x\in X$
空集合　$\phi \Leftrightarrow \mu_\phi(x)=0, \forall x\in X$
相等　$A=B \Leftrightarrow \mu_A(x)=\mu_B(x), \forall x\in X$
包含関係　$A\subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x)\leqq\mu_B(x), \forall x\in X$
補集合　$\overline{A} \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x), \forall x\in X$
和集合　$A\cup B \Leftrightarrow \mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x), \forall x\in X$
共通集合　$A\cap B \Leftrightarrow \mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x), \forall x\in X$

ここで，$x\vee y=\max(x, y)$
$x\wedge y=\min(x, y)$

クリスプ集合において成立する基本的性質がそのまま成り立つ

反射律，反対称律，推移律

二重否定の法則，べき等律，交換律，結合律，分配律，ド・モルガンの法則など

ただし，クリスプ集合でない場合，

$$\mu_A(x)\vee(1-\mu_A(x))\neq 1, \exists x\in X$$

$$\mu_A(x)\wedge(1-\mu_A(x))\neq 0, \exists x\in X$$

であるから

$$A\cup\overline{A}\neq X$$

$$A\cap\overline{A}\neq\phi$$

であり，補元律は成り立たない．

直積

全体集合をX，Yとし，AをXにおけるファジィ集合，BをYにおけるファジィ集合としたとき，AとBの直積$A\times B$は，
XとYの直積$X\times Y=\{(x, y) \mid x\in X, y\in Y\}$におけるファジィ集合で

$$A\times B \Leftrightarrow \mu_{A\times B}(x, y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y), \forall x\in X, \forall y\in Y$$

と定義される．

4.4 ファジィ関係

全体集合をX，Yとしたとき，直積$X\times Y$におけるファジィ関係Rとは，
$X\times Y$におけるファジィ集合Rのことであり，メンバーシップ関数

$$\mu_R: X\times Y\rightarrow[0, 1]$$

によって定義される．

行列表現（X，Yが有限集合の場合）

$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$としたとき，$X\times Y$におけるファジィ関係$R$は$m\times n$行列

$$R=\begin{bmatrix}\mu_R(x_1,y_1) & \cdots & \mu_R(x_1,y_n)\\ & \cdots & \\ \mu_R(x_m,y_1) & \cdots & \mu_R(x_m,y_n)\end{bmatrix}$$

によって表すことができる．