ディジタル論理　Nr. 11

小堀　聡

同値関係

$\forall x P(x) = \forall y P(y)$
$\exists x P(x) = \exists y P(y)$
$\neg \forall x P(x) = \exists x [\neg P(x)]$
$\neg \exists x P(x) = \forall x [\neg P(x)]$
$\forall x [P(x) \wedge Q(x)] = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
$\exists x [P(x) \vee Q(x)] = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
論理式Qが個体変数xを含まないとき
$\forall x [P(x) \wedge Q] = \forall x P(x) \wedge Q$
$\forall x [P(x) \vee Q] = \forall x P(x) \vee Q$
$\exists x [P(x) \wedge Q] = \exists x P(x) \wedge Q$
$\exists x [P(x) \vee Q] = \exists x P(x) \vee Q$

3.3 意味論

（１）対象領域Dを定める．
（２）論理式に含まれている個体定数にDの要素を対応づけ，それを固定する．
（３）論理式に含まれているn変数の関数記号にD上のn変数関数を対応づける．
（４）論理式に含まれているn引数の述語記号にD上のn項関係を対応づける．
（５）以上の対応づけに基づき，素式$P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$の真偽を定める．

$\forall x P(x)$の真偽は，$D=\{a_1, a_2, \cdots\}$としたとき，
$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots$
と同値である．
$\exists x P(x)$の真偽は，$D=\{a_1, a_2, \cdots\}$としたとき，
$P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots$
と同値である．

例：
$\forall x [P(x) \vee Q(f(x), a)]$
（１）$D=\{1, 2, 3, 4\}$
（２）$a=1$
（３）f：$f(1)=4$，$f(2)=3$，$f(3)=2$，$f(4)=1$
（４）$P(x)$：xは偶数である．　$Q(x, y)$：$x>y$である．
このとき，
$x=1$：$P(1) \vee Q(f(1), 1) = P(1) \vee Q(4, 1) = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
$x=2$：$P(2) \vee Q(f(2), 1) = P(2) \vee Q(3, 1) = \mathrm{T} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
$x=3$：$P(3) \vee Q(f(3), 1) = P(3) \vee Q(2, 1) = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
$x=4$：$P(4) \vee Q(f(4), 1) = P(4) \vee Q(1, 1) = \mathrm{T} \vee \mathrm{F} = \mathrm{T}$
であるから，　$\forall x [P(x) \vee Q(f(x), a)] = \mathrm{T}$

（１）D：自然数の集合
（２）$a=10$
（３）$f(x)=x^2$
（４）上と同じ
このとき
$x=1$：$P(1) \vee Q(f(1), 10) = P(1) \vee Q(1, 10) = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
であるから，　$\forall x [P(x) \vee Q(f(x), a)] = \mathrm{F}$

充足可能
　論理式Aがある解釈において真となる．
充足不能（恒偽）
　論理式Aを充足させる解釈が１つもない．
恒真（妥当）
　論理式Aがあらゆる解釈のもとで真である．

標準形（Qは限量記号を示す）　※標準形のことを節形式ともいう．
　連言標準形
$$Qx_1Qx_2\cdots Qx_n\{(A_{11}\vee\cdots\vee A_{1k1})\wedge(A_{21}\vee\cdots\vee A_{2k2})\wedge\cdots\cdots(A_{j1}\vee\cdots\vee A_{jkj})\}$$
　選言標準形
$$Qx_1Qx_2\cdots Qx_n\{(B_{11}\wedge\cdots\wedge B_{1m1})\vee(B_{21}\wedge\cdots\wedge B_{2m2})\vee\cdots\cdots(B_{l1}\wedge\cdots\wedge B_{lml})\}$$

標準形への変換の手続き
（１）含意記号（⇒）を除去する．
（２）否定記号を論理式（素式）の直前に移す．
$$\neg\forall xP(x)=\exists x[\neg P(x)]$$
$$\neg\exists xP(x)=\forall x[\neg P(x)]$$
（３）限量記号で束縛されている変数の標準化を行う．
$$\forall xP(x)=\forall yP(y)$$
$$\exists xP(x)=\exists yP(y)$$
各限量記号ごとに束縛変数の名前を付け替える（たとえば，論理式の左側から順に束縛変数を新しい名前に書き換える）．
（４）すべての限量記号を論理式の前に移す．
$$\forall xP(x)\wedge Q=\forall x[P(x)\wedge Q]$$
$$\forall xP(x)\vee Q=\forall x[P(x)\vee Q]$$
$$\exists xP(x)\wedge Q=\exists x[P(x)\wedge Q]$$
$$\exists xP(x)\vee Q=\exists x[P(x)\vee Q]$$
（５）論理式の部分を標準形に変換する（二重否定，ド・モルガンの法則などを用いる）．

和積標準形への変換の例：
$$\forall x\exists y[P(x,y)\vee Q(y)]\Rightarrow\forall x\forall z[R(x,z)]$$
$$=\neg(\forall x\exists y[P(x,y)\vee Q(y)])\vee\forall x\forall z[R(x,z)] \quad (1)$$
$$=\exists x\forall y[\neg(P(x,y)\vee Q(y))]\vee\forall x\forall z[R(x,z)] \quad (2)$$
$$=\exists x_1\forall x_2[\neg(P(x_1,x_2)\vee Q(x_2))]\vee\forall x_3\forall x_4[R(x_3,x_4)] \quad (3)$$
$$=\exists x_1\forall x_2\forall x_3\forall x_4[(\neg(P(x_1,x_2)\vee Q(x_2)))\vee R(x_3,x_4)] \quad (4)$$
$$=\exists x_1\forall x_2\forall x_3\forall x_4[(\neg P(x_1,x_2)\wedge\neg Q(x_2))\vee R(x_3,x_4)] \quad (5)$$
$$=\exists x_1\forall x_2\forall x_3\forall x_4[(\neg P(x_1,x_2)\vee R(x_3,x_4))\wedge(\neg Q(x_2)\vee R(x_3,x_4))] \quad \text{（５）の続き}$$

体系の例

公理系

Ａ１：$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

Ａ２：$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Ａ３：$(\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)$

Ａ４：$\forall x P(x) \Rightarrow P(y)$

推論規則

Ｂ１：Pと$P \Rightarrow Q$からQを得る．

Ｂ２：$P \Rightarrow Q$から$P \Rightarrow \forall x Q$を得る．

$P \vdash \forall x P$の証明

公理Ａ１のQに$(Q \Rightarrow Q)$を代入すれば

$P \Rightarrow ((Q \Rightarrow Q) \Rightarrow P)$

推論規則Ｂ１より

$P \vdash (Q \Rightarrow Q) \Rightarrow P$

Ｂ２より

$P \vdash (Q \Rightarrow Q) \Rightarrow \forall x P$

また，

$\vdash Q \Rightarrow Q$

であるから，これらにＢ１を適用すると

$P \vdash \forall x P$

この定理より$\vdash P$ならば$\vdash \forall x P$である．

一方，公理Ａ４より

$\vdash \forall x P \Rightarrow P$

であるから，$\vdash \forall x P$ならば$\vdash P$である．

したがって，Pと$\forall x P$は同値である．

自然推論の規則

$$\frac{\forall x P(x)}{P(a)}$$

推論の例

(1)　すべての人間は理性をもっている．

$\forall x\,[\mathrm{MAN}(x) \Rightarrow \mathrm{RATIONAL}(x)]$

自然推論の規則により

$\mathrm{MAN}(a) \Rightarrow \mathrm{RATIONAL}(a)$

(2)　太郎は人間である．

a＝太郎として

$\mathrm{MAN}(a)$

これらに推論規則Ｂ１を適用すると

$\mathrm{RATIONAL}(a)$

すなわち，

(3)　太郎は理性をもっている．