ディジタル論理　Nr. 10

小堀　聡

３．述語論理

3.1 述語論理式

述語論理＝命題論理の拡張

命題論理で適切に表現できない例：

(1)　すべての人間は理性をもっている．　　　　P

(2)　太郎は人間である．　　　　　　　　　　　Q

ゆえに

(3)　太郎は理性をもっている．　　　　　　　　R

（$P \wedge Q$）$\Rightarrow R$

この論理式は妥当でない．
しかし，この推論自体は間違いではない．
各命題の内部構造に立ち入った表現ができないことが問題．

述語論理では個体に着目する．
(1)の命題の表現方法：

MAN（x）：xは人間である

RATIONAL（x）：xは理性を持っている

$\forall x$：すべてのxについて

$\forall x$［MAN（x）$\Rightarrow$RATIONAL（x）］

「すべての個体について，その個体が人間ならばその個体は理性を持っている」

個体についてのみ変数を認める述語論理を第１階述語論理という．

3.2 構成要素

個体定数

特定の個体を表す記号で，a，b，cなどが用いられる．

個体変数

任意の個体を表す記号で，x，y，zなどが用いられる．

関数記号

個体間の関係を表す記号で，f，gなどが用いられる．
対象領域をDとし，fをn変数の関数記号とすれば，

$f : D^n \rightarrow D$

である．

述語記号

個体に関する言明を表す記号で，P，Qなどが用いられる．
対象領域をDとし，Pをn引数の述語記号とすれば，

$P : D^n \rightarrow \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

である．

論理記号

論理式と論理式を結合する記号で，命題論理の場合と同じ記号が用いられる．

限量記号（量化記号）

対象領域内の対象となる個体の範囲を示す記号で次の２つが用いられる.

$\forall$：全称記号と呼ばれ,「すべての個体について～である」という概念を表す.

$\exists$：存在記号と呼ばれ,「～であるような個体が少なくとも１つ存在する」という概念を表す.

存在記号は全称記号によって, $\exists x P(x) = \neg \forall x [\neg P(x)]$ と定義される.

項の帰納的定義

（１）個体定数, 個体変数は項である.

（２）$t_1, t_2, \cdots, t_n$が項であり, fがn変数の関数記号であるとき,

$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は項である.

（３）以上,（１）,（２）より項とわかるものだけが項である.

項は対象領域の元である.

論理式の帰納的定義

（１）$t_1, t_2, \cdots, t_n$が項であり, Pがn引数の述語記号であるとき,

$P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ を素式という. 素式は論理式である.

（２）P, Qが論理式であれば, $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$は論理式である.

（３）Pが論理式で, xが個体変数であるとき, $\forall x P$, $\exists x P$は論理式である.

（４）以上,（１）,（２）,（３）より論理式とわかるものだけが論理式である.

束縛変数

限量記号で限定された変数

自由変数

束縛変数でない変数

閉式

自由変数を含まない述語論理式

作用域

束縛変数の影響がおよぶ部分論理式

論理式の例：

$\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x, f(x))]$

$\forall x \exists y [Q(f(x), y) \Rightarrow \exists z R(y, z, w)]$

文章の記号化の例：

（１）人には誰にでも好きな花というのがある.

$H(x)$: xは人である　$F(y)$: yは花である

$L(x, y)$: xはyを好きである

$\forall x [H(x) \Rightarrow \exists y [F(y) \wedge L(x, y)]]$

（２）人は誰でも誰かを愛するが, 愛する相手が自分を愛してくれるとは限らない.

$\forall x [H(x) \Rightarrow \exists y [H(y) \wedge L(x, y)]]$

$\wedge \neg \forall x \forall y [H(x) \wedge H(y) \wedge L(x, y) \Rightarrow L(y, x)]$

（１）の論理式は,

$H(x)$: xは人である　$F(y)$: yは女性である

$L(x, y)$: yはxの親である

とすれば,

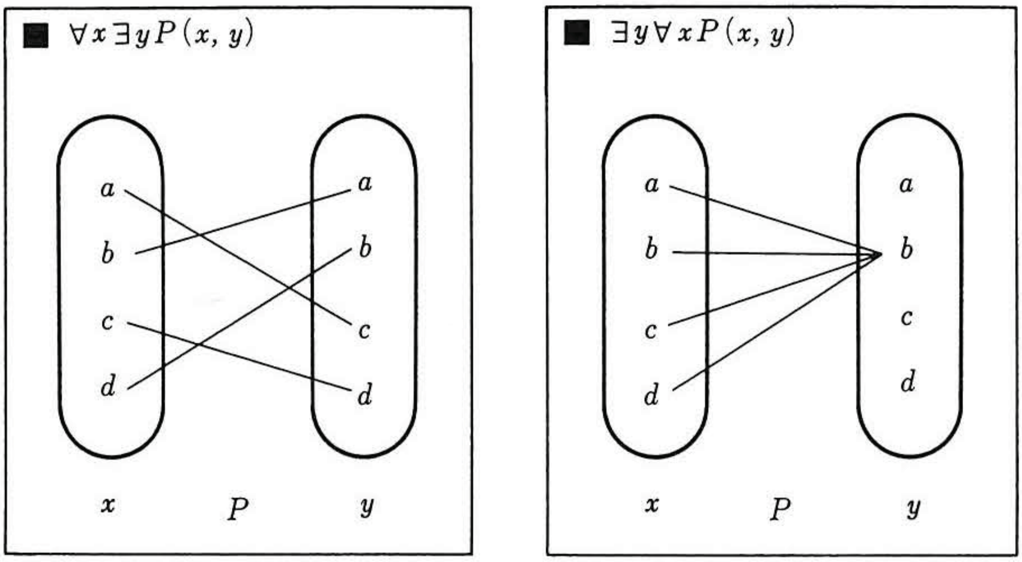
誰にでも母親がいる.

を表すことになる.

全称記号と存在記号の順序

（1）$\forall x \exists y P(x, y)$
（2）$\exists y \forall x P(x, y)$

（1）「すべての x について，それぞれ $P(x, y)$ であるような y が少なくとも１つ存在する」
（2）「ある y が存在し，その y に関してはすべての x について $P(x, y)$ である」



全称記号と存在記号の順序の相違

一方，全称記号同士や存在記号同士の場合は順序には関係がなく意味が同じになる．

$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$
$\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$