ディジタル論理　Nr. 5

小堀　聡

2.1 論理回路への応用

算術による真理値の計算

式Aの真理値を$v(A)$と書く．

１が真，０が偽を表すものとするとき，つぎの式が成り立つ．

$$v(\neg A) = 1 - v(A)$$
$$v(A \wedge B) = v(A) \cdot v(B) = \min(v(A),\ v(B))$$
$$v(A \vee B) = v(A) + v(B) - v(A) \cdot v(B) = \max(v(A),\ v(B))$$
$$v(A \Rightarrow B) = 1 - v(A) + v(A) \cdot v(B)$$
$$= \max(1 - v(A),\ v(B))$$

ただし，$\min(x,\ y)$はxとyのうち小さい方を値にとる関数，

$\max(x,\ y)$はxとyのうち大きい方を値にとる関数．

例：

$v(X) = 1$，$v(Y) = v(Z) = 0$，$v(U) = 1$のとき，

$$v(\neg Z \wedge (X \Rightarrow (Y \vee \neg U))) = v(\neg Z) \cdot v(X \Rightarrow (Y \vee \neg U))$$
$$v(\neg Z) = 1 - v(Z) = 1$$
$$v(X \Rightarrow (Y \vee \neg U)) = \max(1 - v(X),\ v(Y \vee \neg U))$$
$$= \max(0,\ \max(v(Y),\ 1 - v(U)))$$
$$= \max(0,\ \max(0,\ 1 - 1)) = 0$$

よって，

$$v(\neg Z \wedge (X \Rightarrow (Y \vee \neg U))) = 1 \cdot 0 = 0$$

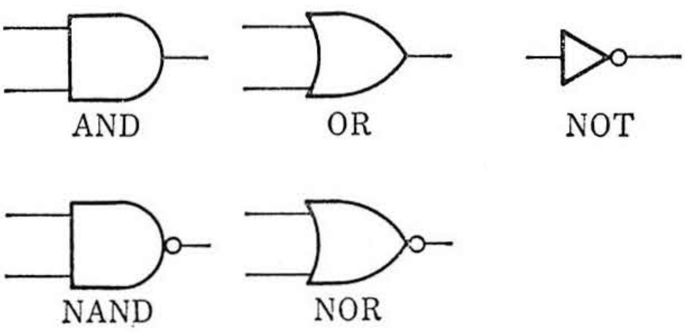
偽である．

論理回路の表現

入力P，Qに対するＡＮＤゲートの出力をＡＮＤ（P，Q）と書くならば，

他のゲートも含めて以下のように表せる．

ＮＯＴ（A）	⇔	$\neg A$	$\overline{A}$
ＡＮＤ（A，B）	⇔	$A \wedge B$	$A \cdot B$
ＯＲ（A，B）	⇔	$A \vee B$	$A + B$
ＮＡＮＤ（A，B）	⇔	$\neg(A \wedge B)$	$\overline{A \cdot B}$
ＮＯＲ（A，B）	⇔	$\neg(A \vee B)$	$\overline{A + B}$
ＸＯＲ（A，B）	⇔	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$	$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$



基本的論理回路の記号

ＮＡＮＤあるいはＮＯＲだけで他の論理ゲートを構成することができる．

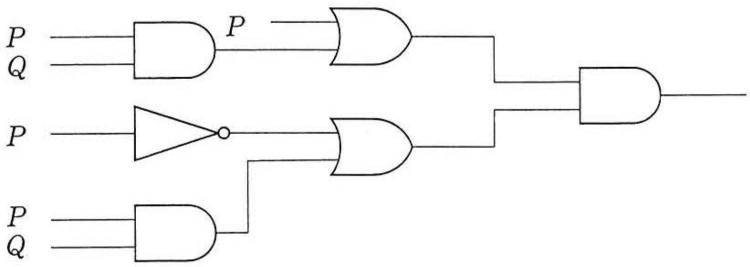
ＮＯＴ（A）　＝ＮＡＮＤ（A，A）＝ＮＯＲ（A，A）
ＡＮＤ（A，B）＝ＮＡＮＤ（ＮＡＮＤ（A，B），ＮＡＮＤ（A，B））
　＝ＮＯＲ（ＮＯＲ（A，A），ＮＯＲ（B，B））
ＯＲ（A，B）　＝ＮＡＮＤ（ＮＡＮＤ（A，A），ＮＡＮＤ（B，B））
　＝ＮＯＲ（ＮＯＲ（A，B），ＮＯＲ（A，B））

２入力１出力の論理回路の真理値表

X_1	1	1	0	0	
X_2	1	0	1	0	
Y_1	1	1	1	1	恒等
Y_2	1	1	1	0	ＯＲ
Y_3	1	1	0	1	
Y_4	1	1	0	0	X_1
Y_5	1	0	1	1	含意
Y_6	1	0	1	0	X_2
Y_7	1	0	0	1	同値（一致）
Y_8	1	0	0	0	ＡＮＤ
Y_9	0	1	1	1	ＮＡＮＤ
Y_{10}	0	1	1	0	ＸＯＲ
Y_{11}	0	1	0	1	ＮＯＴ X_2
Y_{12}	0	1	0	0	
Y_{13}	0	0	1	1	ＮＯＴ X_1
Y_{14}	0	0	1	0	
Y_{15}	0	0	0	1	ＮＯＲ
Y_{16}	0	0	0	0	恒等

標準形の回路への応用

例：



ＡＮＤ（ＯＲ（P，ＡＮＤ（P，Q）），
　　ＯＲ（ＮＯＴ（P），ＡＮＤ（P，Q）））

論理式で表すと，

$(P \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee (P \wedge Q))$

積和標準形に直すと，

$(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q \wedge P \wedge Q)$

$A \wedge \neg A = \mathrm{F}$となる基本積を除き，

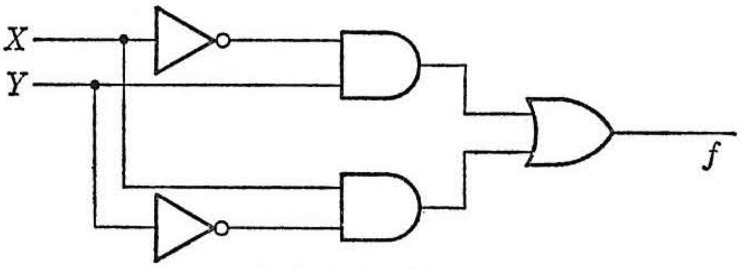
$A \wedge A = A$で置き換えると，

$P \wedge Q$　になる．つまり，ＡＮＤゲート１つである．

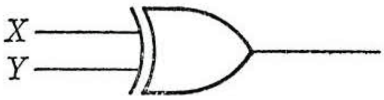
補足：XOR（排他的論理和）について

X	Y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

（a）　真理値表



（b）論理回路



（c）記号

アセンブラでの利用

レジスタの値に０を代入するときに使う.

例：

AL←0
MOV AL, 0　　ではなく
XOR AL, AL　を使用

※同じ値同士を XOR 演算すると必ず０になる.

暗号化と復号化での利用

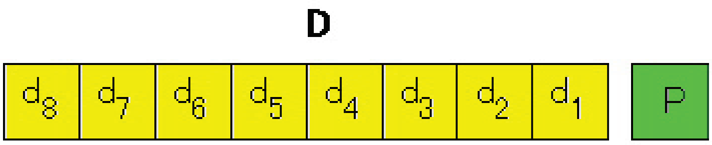
データと暗号鍵を XOR 演算して暗号化.
暗号化されたデータと暗号鍵をＸＯＲ演算して復号.
（元のデータに戻る）

グラフィックでの利用

XOR 演算子を使って，コピー元の色とコピー先の色を組み合わせる.
Windows API では SRCINVERT というパラメータを用いてビットマップを XOR で転送できる.
{dest = source XOR dest}
もう一度 XOR で転送すると転送前の状態に戻る.

パリティビット

与えられた２進数に対して全体の奇偶性を保つために与えられる１ビットの２進数，誤り検出に用いられる.
値が１であるビットの数が奇数個の時にパリティビットの値は１になる（偶数個の時は０).
送信側と受信側でパリティビットが一致すれば誤りなしと考える.
　このままの値（偶数個→０）→偶数パリティビット
　この値を反転（奇数個→０）→奇数パリティビット



$$P = d_1 \text{ xor } d_2 \text{ xor } d_3 \text{ xor } d_4 \text{ xor } d_5 \text{ xor } d_6 \text{ xor } d_7 \text{ xor } d_8$$