ディジタル論理　Nr. 4

小堀　聡

1.8 ブール代数

ブール束とブール代数

分配的で相補的な束（A，＋，・）をブール束という．
要素 a に補元’を与える演算，補演算’を定義し，
ブール束で定義される代数系（A，＋，・，’）をブール代数という．

基本則

a，b，c をブール代数（A，＋，・，’）の任意の要素であるとすると，
以下の法則が成り立つ．

交換則

$$a+b=b+a$$
$$a\cdot b=b\cdot a$$

結合則

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

分配則

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$$
$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

べき等則

$$a+a=a$$
$$a\cdot a=a$$

吸収則

$$a+(a\cdot b)=a$$
$$a\cdot(a+b)=a$$

補元則（相補則）

$$a+a'=1,\quad 1'=0$$
$$a\cdot a'=0,\quad 0'=1$$

同一則

$$a+0=a,\quad a+1=1$$
$$a\cdot 1=a,\quad a\cdot 0=0$$

回帰則（二重否定）

$$(a')'=a$$

ド・モルガンの法則

$$(a+b)'=a'\cdot b'$$
$$(a\cdot b)'=a'+b'$$

双対原理

ブール代数の任意の定理の双対も，またブール代数の定理である．
（双対とは，＋と・，０と１を置き換えたもの.）

公理的な定義

集合 A を２項演算＋と・，単項演算’，および２つの異なる要素，すなわち
零元０と単位元１をもつ集合とする．A の任意の要素 a，b，c が次の法則を
満たすとき，（A，＋，・，’）をブール代数という．
（公理：交換則，分配則，補元則，同一則）

べき等則の証明：

$a = a + 0$
$= a + (a \cdot a')$
$= (a + a) \cdot (a + a')$
$= (a + a) \cdot 1$
$= a + a$

一方，$a \cdot a = a$は双対原理より得られる．

吸収律，回帰律なども同様に証明可能

ブール代数の例：

命題論理（{真，偽}，論理和，論理積，否定）
論理回路（{H，L}，OR，AND，NOT）
いずれも２値のブール代数（{１，０}，＋，・，’）の例になっている．

ブール式

２値のブール代数（{１，０}，＋，・，’）について
n変数x_1，x_2，x_3，…，x_nと演算＋，・，’で構成した式

最小項

n変数すべての積の形になっている

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n$$

加法標準形

最小項の和

例：

$$x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z' + x' \cdot y \cdot z$$

最大項

n変数すべての和の形になっている

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

乗法標準形

最大項の積

例：

$$(x + y + z) \cdot (x' + y + z') \cdot (x' + y' + z')$$

加法標準形への変換法

（１）回帰則とド・モルガンの法則により，
すべての補演算を括弧の中に入れ，変数に直接施すようにする．
（２）分配則により，
積の和の形にする．
（３）交換則，べき等則，吸収則により，
各項の冗長な変数と冗長な項を除く．
（４）各項をすべての変数を含むようにする（完全な標準形）．

（４）の例：

$$a'c + ab = a'c(b + b') + ab(c + c')$$
$$= a'bc + a'b'c + abc + abc'$$