ディジタル論理　Nr. 3

小堀　聡

1.7 公理系

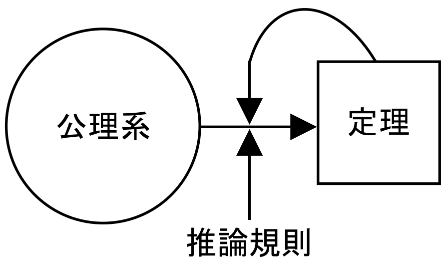
体系
　恒真式の集合を用意し，これに推論規則を適用して別の新しい恒真式を生成するもの
公理系
　出発点となる恒真式の集合
定理
　公理系と推論規則から導き出される恒真式

公理は恒真であり，推論規則は恒真性を保存する．

体系の例：
　公理系
　　Ａ１：$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
　　Ａ２：$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
　　Ａ３：$(\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)$
　推論規則
　　Pと$P \Rightarrow Q$からQを得る．（肯定式）
　　これを以下のように表す．

$$\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

　　線の上を前提，下を結論という．



　推論規則を三段論法ともいう．
　（１）Pが正しいことが示されたとする
　（２）「PならばQ」が正しいことが示されたとする
　（３）このときQも正しい

公理の恒真性の例：
　Ａ１について
　P＝Ｆならば全体はＴであり，P＝Ｔならば$(Q \Rightarrow P)$＝Ｔだから，
　やはり全体はＴとなり，恒真である．

形式的証明（証明）
　公理系から推論規則を用いて定理を導く過程

証明の例：
　$p \Rightarrow p$が定理であることを証明する．
　（１）Ａ１より
　　　$p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$
　（２）Ａ２より
　　　$(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$
　（３）（１）と（２）に推論規則を適用して
　　　$(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$
　（４）Ａ１より
　　　$p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$
　（５）（３）と（４）に推論規則を適用して
　　　$p \Rightarrow p$
　よって，$p \Rightarrow p$は定理である．

論理式Qに対して形式的証明が存在するとき，これを

$\vdash Q$

と書き，Qは証明可能，あるいは定理であるという．

例：

上記の証明の例より，

$\vdash P \Rightarrow P$

と表せる．

また，論理式の有限の列 Γ が与えられたとき，それを公理系に加えることによってQに対する形式的証明が存在するとき，これを

$\Gamma \vdash Q$

と書き，Qは Γ から演繹可能であるといい，このような Γ を仮説という．

例：

公理Ａ１に $\Gamma = \{P\}$ を付け加えたとすると，

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$，$P$

となり，これに推論規則を用いて，

$Q \Rightarrow P$

が得られる．

よって，

$P \vdash Q \Rightarrow P$

である．

これはQがなんであっても，Pを仮定すれば$Q \Rightarrow P$が証明されるということである．

演繹定理

AとBは論理式で，Γ は論理式の有限の列であるとする．もし

$\Gamma, A \vdash B$

ならば，

$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$

である．この逆もいえる．

健全性

定理は恒真である．

完全性

定理は恒真式であり，逆に恒真式であれば定理である．

無矛盾性

いかなる論理式Pに対してもPと$\neg P$がともに証明可能となることはない．

独立性

公理は他の公理から推論規則によって証明されない．