ディジタル論理　Nr. 2

小堀　聡

1.4 論理式の変換

交換律

$A \vee B = B \vee A \quad A \wedge B = B \wedge A$

結合律

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

分配律

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

べき等律

$A \vee A = A \quad A \wedge A = A$

真，偽

$A \vee \neg A = \mathrm{T} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{F}$（補元律）

$X = \mathrm{F}$のとき　$A \vee X = A \quad A \wedge X = \mathrm{F}$　（ブール代数：同一則）

$X = \mathrm{T}$のとき　$A \wedge X = A \quad A \vee X = \mathrm{T}$

吸収律

$A \vee (A \wedge B) = A \quad A \wedge (A \vee B) = A$

ド・モルガンの法則

$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

否定

$\neg\neg A = A$（２重否定）

条件文

$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$

1.5 意味論

式の恒真性と充足可能性

式Aに現れる命題変数をX_1，X_2，……，X_n とする．

また，式Aの真理値を v（A）と書く．

$v(X_1)$，$v(X_2)$ ……，$v(X_n)$ がそれぞれ任意にＴ，Ｆを値にするときに，つねに v（A）＝Ｔであるならば，Aは恒真であるという．

$v(X_1)$，$v(X_2)$ ……，$v(X_n)$ のある組み合わせについて，v（A）＝Ｔとなるならば，Aは充足可能であるという．

恒真式（トートロジー）：

素式の真偽にかかわらず常に真となる論理式

恒偽式：

素式の真偽にかかわらず常に偽となる論理式

妥当：

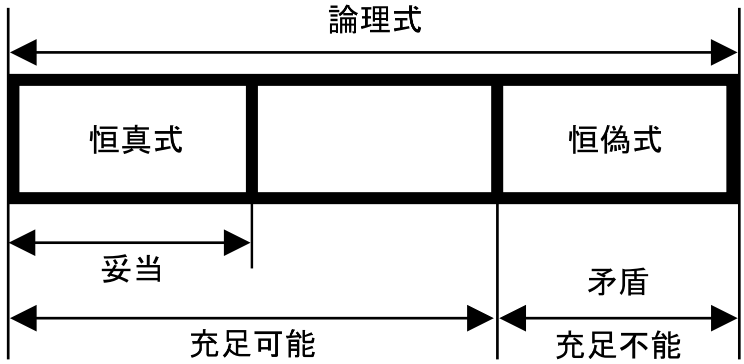
論理式Pが恒真式であるとき，Pはいかなる解釈に対しても真であるという意味で「Pは妥当である」という．

充足不能（矛盾）：

論理式Pが恒偽式であるとき，Pを真にするような解釈は１つも存在しないという意味で「Pは充足不能である」という．

充足可能：

論理式Pが恒偽式でないとき，Pを真にするような解釈が少なくとも１つ存在するという意味で「Pは充足可能である」という．



例：

（1）$A\vee(B\wedge\neg A)\vee(\neg B\wedge\neg A)$

$=A\vee((B\vee\neg B)\wedge\neg A)$　　分配律

$=A\vee(\mathrm{T}\wedge\neg A)$　　補元律

$=A\vee\neg A$

$=\mathrm{T}$　　補元律

ゆえに，恒真である．

（2）$A\wedge\neg(A\vee B)$

$=A\wedge(\neg A\wedge\neg B)$　　ド・モルガンの法則

$=(A\wedge\neg A)\wedge\neg B$　　結合律

$=\mathrm{F}\wedge\neg B$　　補元律

$=\mathrm{F}$

ゆえに，充足不能である．

（3）$\neg(A\vee B\Rightarrow A)$

$A=\mathrm{T}$のとき，

$(A\vee B\Rightarrow A)=\mathrm{T}$であり，$\neg(A\vee B\Rightarrow A)=\mathrm{F}$

$A=\mathrm{F}$かつ$B=\mathrm{T}$のとき，

$(A\vee B\Rightarrow A)=\mathrm{F}$であり，$\neg(A\vee B\Rightarrow A)=\mathrm{T}$

ゆえに，充足可能であるが恒真でない．

1.6 標準形

リテラル

命題変数またはその否定，すなわちX，$\neg X$の形をリテラルという．

和積標準形（乗法標準形）

リテラルから$\vee$のみで作られる式を基本和という．

基本和から$\wedge$のみで作られる式を和積標準形であるという．

積和標準形（加法標準形）

リテラルから$\wedge$のみで作られる式を基本積という．

基本積から$\vee$のみで作られる式を積和標準形であるという．

例：

（1）$(\neg X\vee Y\vee\neg Z)\wedge(X\vee Z)\wedge(\neg Y\vee\neg Z)$

和積標準形である．

（2）$(\neg X\wedge Y\wedge\neg Z)\vee(X\wedge Z)\vee(\neg Y\wedge\neg Z)$

積和標準形である．

（3）$((\neg X\vee Y)\wedge\neg Z)\vee(X\vee Z)$

どちらの標準形でもない．

標準化の手続き

和積標準形の場合

任意の式は次の手続きで，同値な和積標準形に変形される．

（１）$\neg(A\vee B)$ を $\neg A\wedge\neg B$ で置きかえる

（２）$\neg(A\wedge B)$ を $\neg A\vee\neg B$ で置きかえる

（３）$A\Rightarrow B$ を $\neg A\vee B$ で置きかえる

（４）$\neg\neg A$ を A で置きかえる

（５）$A\vee(B\wedge C)$ を $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ で置きかえる

（６）$(A\wedge B)\vee C$ を $(A\vee C)\wedge(B\vee C)$ で置きかえる

例：

（１）$(X\Rightarrow Y\wedge Z)\wedge(\neg Y\Rightarrow X\wedge Y)$

$=(\neg X\vee(Y\wedge Z))\wedge(\neg\neg Y\vee(X\wedge Y))$　　（３）を２回

$=(\neg X\vee Y)\wedge(\neg X\vee Z)\wedge(Y\vee X)\wedge(Y\vee Y)$　　（４）（５）

（２）$\neg((X\wedge(\neg X\vee Y))\vee(X\wedge Y\Rightarrow Z))$

$=\neg(X\wedge(\neg X\vee Y))\wedge\neg(X\wedge Y\Rightarrow Z)$　　（１）

$=(\neg X\vee\neg(\neg X\vee Y))\wedge\neg(\neg(X\wedge Y)\vee Z)$　　（２）（３）

$=(\neg X\vee(\neg\neg X\wedge\neg Y))\wedge\neg\neg(X\wedge Y)\wedge\neg Z$　　（１）

$=(\neg X\vee X)\wedge(\neg X\vee\neg Y)\wedge X\wedge Y\wedge\neg Z$　　（４）（５）

積和標準形の場合

（５’）$A\wedge(B\vee C)$ を $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ で置きかえる

（６’）$(A\vee B)\wedge C$ を $(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$ で置きかえる