ディジタル論理　Nr．1

小堀　聡

１．命題論理

1.1 構成要素

命題：文（世界について述べている文）

記号と式

論理記号（命題結合子）：論理演算子を表す．

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$

$\neg$	否定	―でない	NOT
$\wedge$	連言（論理積）	―かつ～	AND
$\vee$	選言（論理和）	―または～	OR
$\Rightarrow$	含意（条件文）	―ならば～	IF ～ THEN
$\Leftrightarrow$	同値（双条件文）	―のときのみ　かつ　そのときのみ～	

基本論理式（命題変数）：基本命題を表す．

X，Y，……などで表す．　正式には，X_0，X_1，X_2……と表す．

合成論理式：論理記号と基本論理式で合成される式．

P，Qがすでに定義された式ならば，$\neg P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \Rightarrow Q$，$P \Leftrightarrow Q$も式である．

論理記号の結合の範囲を明示するため括弧を必要に応じて用いる．

帰納的定義

（１）命題変数を素式という．素式は論理式である．
（２）Pが論理式あれば，$\neg P$は論理式である．
（３）P，Qが論理式であれば，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \Rightarrow Q$，$P \Leftrightarrow Q$は論理式である．
（４）以上，（１），（２），（３）より論理式とわかるものだけが論理式である．

結合の強さ

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$

この順位により，誤解の生じない範囲で括弧を省略できる．

1.2 文の記号化

例：

（１）雨が止んだし気温も上がった．
「雨が止んだ」をX，「気温が上がった」をYとすれば，

$X \wedge Y$

（２）雨が止んで暖かくなったらハイキングへ行く．
「ハイキングに行く」をZとすれば，

$(X \wedge Y) \Rightarrow Z$

（３）寝るか食べるかすれば元気になる．
「寝る」をX，「食べる」をY，「元気になる」をZとすれば，

$(X \vee Y) \Rightarrow Z$

（４）nが２より大きい素数ならばn＋１は素数でない．
「nが２より大きい」をX，「nが素数である」をY，「n＋１が素数である」をZとすれば，

$(X \wedge Y) \Rightarrow \neg Z$

「nが２より大きい素数である」をUとすれば，$U \Rightarrow \neg Z$

1.3 真理値

命題は真か偽の値を持つ．

真（true）：T

偽（false）：F

真理値表

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

基本命題に任意にＴ，Ｆの１つを与えると，式の真理値が求まる．

真理値の計算例：　※各自で値を入れてみること．

P	Q	$\neg P \vee Q$	$((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$	$P \wedge \neg(\neg P \Rightarrow Q)$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			