情報と人間　Nr. 2

小堀　聡

「情報の表現１」

１．なぜ我々は10進数を使っているのか？

10進数とは，10個単位でものを数えているということ．
例：2345という表記は
$2345 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$
1000は100が10個，100は10が10個…
しかし，10個単位でなければならない必然性はない．
８個単位でも12個単位でもよいはずでは？
我々の手の指が両手で10本だから10進数を使うようになったとされる．

２．では，２進数ではどう表現するか

例：３桁の２進数

２進数	10進数
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

２進数では２個単位で数える
例：$(111)_2$という表記は
$(111)_2 = 1 \times (100)_2 + 1 \times (10)_2 + 1 \times (1)_2$
$(100)_2$は$(10)_2$が２個，$(10)_2$は$(1)_2$が２個…

１桁では２通りの状態を表現
２桁では４通りの状態を表現
３桁では８通りの状態を表現
４桁では16通りの状態を表現
８桁では256通りの状態を表現
ｎ桁では２のｎ乗通りの状態を表現

３．一般化すると…

ｒ進数ではｒ個単位で数える．
ｎ桁ではｒのｎ乗通りの状態を表現できる．
これを数式（基数の表現の式）で示すと…

$$N = a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \cdots\cdots + a_0 \cdot r^0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + \cdots\cdots + a_{-m} \cdot r^{-m}$$
$$= \sum_{i=-m}^{n} a_i \cdot r^i$$

例：

$$2345 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$$
$$= 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$
$$(101)_2 = 1 \times (100)_2 + 0 \times (10)_2 + 1 \times (1)_2$$
$$= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

ｒ進数ではｒ個単位で数えるのだから，ｒ個の記号が必要．ｒが大きすぎると大変．
しかし，ｒが小さすぎると，桁数が増えて大変．
よって，10 進数は妥当．
でも，８個単位でも 12 個単位でもよいのでは？

４．２進数を 10 進数に変換する方法

基数の表現の式のとおり．

$$(10101011)_2 =$$
$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= (128)_{10} + (32)_{10} + (8)_{10} + (2)_{10} + (1)_{10}$$
$$= (171)_{10}$$

５．10 進数を２進数に変換する方法

２で割って商と余りを求め，さらにその商を２で割って商と余りを求め…ということを繰り返して余りを逆順に並べる．

例：10 進数$(157)_{10}$を２進数に変換

157÷2＝78	余り 1
78÷2＝39	余り 0
39÷2＝19	余り 1
19÷2＝9	余り 1
9÷2＝4	余り 1
4÷2＝2	余り 0
2÷2＝1	余り 0
1÷2＝0	余り 1

$$(157)_{10} = (10011101)_2$$

原理の説明

$2)\underline{11}$	$11 = 11 \times 2^0$
$2)\underline{\ 5}\cdots 1$	$11 = 5 \times 2^1 + \underline{1} \times 2^0$
$2)\underline{\ 2}\cdots 1$	$11 = 2 \times 2^2 + \underline{1} \times 2^1 + \underline{1} \times 2^0$
$2)\underline{\ 1}\cdots 0$	$11 = 1 \times 2^3 + \underline{0} \times 2^2 + \underline{1} \times 2^1 + \underline{1} \times 2^0$
$0\cdots 1$	$11 = 0 \times 2^4 + \underline{1} \times 2^3 + \underline{0} \times 2^2 + \underline{1} \times 2^1 + \underline{1} \times 2^0$

$$(11)_{10} = (1011)_2$$

６．２進数では桁が大きくなりすぎるのが不便

そこで，８進数や16進数が用いられる．

16進数では，10進数の０から９まではそのまま０から９の数字を用い，10から15までは，ＡからＦまでのアルファベットを用いる．

８進数は２進数を３桁ずつ，16進数は４桁ずつに区切って変換したものになる．

10進数と各基数に対応する数の関係

10進数	2進数	8進数	16進数
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

７．10進数と２進数，８進数，16進数の対応

16進数から10進数への変換

基数を16にして…

例：$(C9)_{16} = (C)_{16} \times 16^1 + (9)_{16} \times 16^0 = 12 \times 16 + 9 \times 1 = 201$

10進数から16進数への変換

16で割って商と余りを求めて…

例：$182 \div 16 = 11 \cdots 6$

$11 \div 16 = 0 \cdots 11$　※$11 = (B)_{16}$

$182 = (B6)_{16}$

16進数から２進数への変換

16進数の１桁を２進数の４桁に

例：$(FB)_{16} = (11111011)_2$　※$(F)_{16} = (1111)_2$，$(B)_{16} = (1011)_2$

２進数から16進数への変換

２進数の４桁を16進数の１桁に

例：$(11101001)_2 = (E9)_{16}$　※$(1110)_2 = (E)_{16}$，$(1001)_2 = (9)_{16}$

8．＜補足＞小数部がある場合（２進数→10 進数）

整数だけの場合と同様（基数の表現の式のとおり）．

例：２進数$(1100.1101)_2$を 10 進数に変換

$(1100.1101)_2 =$

$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$

$= (8)_{10} + (4)_{10} + (0.5)_{10} + (0.25)_{10} + (0.0625)_{10}$

$= (12.8125)_{10}$

9．＜補足＞小数部がある場合（10 進数→２進数）

整数部と小数部に分ける．
整数部は整数だけの場合と同様．

例：10 進数$(35.48)_{10}$を２進数に変換

整数部（35）

35÷2＝17	余り 1
17÷2＝8	余り 1
8÷2＝4	余り 0
4÷2＝2	余り 0
2÷2＝1	余り 0
1÷2＝0	余り 1

$(35)_{10} = (100011)_2$

小数部に２を掛けて積を求め，さらにその積の小数部に２を掛けて積を求め…ということを小数部が０になるまで繰り返して，積の整数部を順に並べる．小数部が０にならない場合は適当な桁で打ち切る．

小数部（0.48）

0.48×2＝0.96	整数部 0
0.96×2＝1.92	整数部 1
0.92×2＝1.84	整数部 1
0.84×2＝1.68	整数部 1
：	（小数点以下４桁で打ち切り）

$(0.48)_{10} \fallingdotseq (0.0111)_2$

以上より　$(35.48)_{10} \fallingdotseq (100011.0111)_2$

誤差の確認

$(0.0111)_2 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$

$= (0.25)_{10} + (0.125)_{10} + (0.0625)_{10}$

$= (0.4375)_{10}$

0.48－0.4375＝0.0425 の誤差が生じている．

10. ＜補足＞負の数の表現

補数による表現

最上位の桁を符号に用いて，０ならば正，１ならば負とする.

１の補数

負の数の場合，絶対値の各桁を反転させる.

たとえば，－６ならば，絶対値６の２進数は$(0110)_2$となるので，その反転$(1001)_2$で表現される.

２の補数

１の補数に１を加えたもの.

たとえば，－６ならば$(1010)_2$と表現される.

２の補数を用いると，減算が加算で表現できる.

たとえば，７－６＝７＋（－６）を２進数で表すと

$(0111)_2$ ＋ $(1010)_2$ ＝ $(10001)_2$となり，

ここで桁上がりを無視して$(0001)_2$となる.

４桁での表現範囲

絶対値表現：$(0000)_2$～$(1111)_2$　＝　0～15

２の補数表現：$(1000)_2$～$(0111)_2$　＝　－８～７